CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1987

Série P

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

On rappelle que $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels privé de l'élément 0.

1. Montrer que, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in]-1,+\infty[\times]-1, +\infty[\times \mathbb{R}$, l'intégrale $I(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta e^{-\gamma t}\, dt$ est convergente.

   En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u(x-u)}}\, du$ est convergente.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On désigne par h_x la fonction numérique définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h_x(t) = t \cdot \frac{e^{-tx} - 1}{x}$$

   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $h_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1} x^n}{(n+1)!}$.

   En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $|h_x(t)| \leqslant e^{|x|} - 1$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose : $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u(x-u)}}\, du$. D'autre part, on note :

$$A = I\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } B = I\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

   a. Prouver que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\left|\frac{f(x) - A}{x} + B\right| \leqslant A\,(e^x - 1)$.

   Déterminer, en fonction de f, la fonction f_1 qui coïncide avec f sur $]0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$, dérivable à droite en 0 ; donner la valeur de $f_1'(0)$.

   b. Par un raisonnement analogue, déterminer, en fonction de f, la fonction f_2 qui coïncide avec f sur $]-\infty,0[$, continue sur $]-\infty,0]$, dérivable à gauche en 0 ; donner la valeur de $f_2'(0)$.

4. On désigne par (E) l'équation différentielle : $2x y'' + 2(x+1) y' + y = 0$. (x étant une variable réelle et y une fonction réelle de x).
   Etant donné une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note S la somme de la série entière réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et D le disque ouvert de convergence de cette série entière.

   On suppose que : $D \neq \emptyset$; trouver une relation de récurrence (R) entre les termes de la suite (a_n), telle que (R) soit une condition nécessaire et suffisante pour que S soit solution de (E) sur D.
   Déterminer D dans le cas où la suite (a_n) vérifie (R).

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\, d\theta$, et on désigne par g la somme de la série entière réelle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{n!} x^n$.

   a. Etablir que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, puis que g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   b. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'application numérique définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ U_n(\theta) = (-1)^n \frac{a^n \sin^{2n}\theta}{n!}.$$

   Prouver que la série d'applications $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

   c. Déterminer alors une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^{\pi/2} \varphi(x,\theta)\, d\theta.$$

   En déduire g' et le sens de variation de g.

   d. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose : $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t\,(g(t))^2}\, dt$. Exprimer à l'aide de G, la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$.

6. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in]-1, +\infty[\times]-1, +\infty[\times \mathbb{R}$.

   a. Vérifier que : $I(\alpha, \beta, \gamma) - I(\alpha+1, \beta, \gamma) = e^{-\gamma} I(\beta+1, \alpha, -\gamma)$

   et : $I(\alpha+1, \alpha, 0) = \frac{1}{2} I(\alpha, \alpha, 0)$.
   Que peut-on en déduire pour A et B ?

   b. Prouver que : $I(\alpha, \beta, \gamma) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1}\theta \cdot \cos^{2\beta+1}\theta \cdot e^{-\gamma \sin^2\theta}\, d\theta$.
   Calculer A, B, g(0), g'(0).

7. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f(x) à l'aide de g(x).

   Retrouver ainsi les fonctions f_1 et f_2 du 3°.

8. a. Montrer que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) \leqslant \text{Arc sin}\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}\right) + \frac{\pi}{2}\, e^{-\sqrt{x}}$.

   En déduire la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$.

   b. Montrer que : $\forall x \in \left]-\infty,0\right[,\ g(x) \geqslant \frac{\pi}{4} e^{-x/2}$.

   En déduire la limite de g(x) quand x tend vers $-\infty$, et la limite de $\frac{g(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

   c. Représenter graphiquement sur un même schéma les fonctions g, f_1 et f_2.
